

# Approximation de l'entropie de von Neumann de graphes pour une analyse de vulnérabilité



AVERTY Tristan, DARÉ-EMZIVAT Delphine, BOUDRAA Abdel-Ouahab, PRÉAUX Yves  
[tristan.averty, delphine.dare, abdel.boudraa, yves.preaux]@ecole-navale.fr



IRENav, École Navale/Arts-Metiers ParisTech, BCRM Brest, CC 600 – Lanvéoc, 29240 Brest, France.

## Résumé

Nous exploitons la variation de l'entropie de von Neumann de graphes comme mesure de leur vulnérabilité en proposant une nouvelle forme approchée de cette entropie basée sur des attributs structurels du graphe, à savoir le nombre d'arêtes, de sommets ou encore des degrés du graphe. L'utilisation d'une telle forme est motivée par l'optimisation du temps de calcul qui en découle. Disposant d'une forme simplifiée de l'entropie, nous l'utilisons pour la caractérisation de la vulnérabilité d'un graphe via l'étude de la variation entropique liée à une perturbation de ses arêtes. Les résultats obtenus sur des graphes de grandes tailles montrent la pertinence d'une telle approximation.

### Principaux objectifs

- Établir une **carte de vulnérabilité** d'un graphe ;
- Lier **vulnérabilité** et **théorie de l'information** ;
- Avoir un calcul le plus rapide possible en **approximant l'entropie de von Neumann**.

### Graphe

Un **graphe simple non-orienté et pondéré**  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{W})$  est constitué d'un ensemble  $\mathcal{V}$  de  $n$  **sommets**, d'un ensemble  $\mathcal{E} \subseteq \{\{v_i, v_j\} \mid (v_i, v_j) \in \mathcal{V}^2, v_i \neq v_j\}$  de  $m$  **arêtes** et d'une **matrice d'adjacence**  $\mathbf{W}$  contenant les pondérations  $[\mathbf{W}]_{ij}$  des arêtes  $(v_i, v_j)$ .

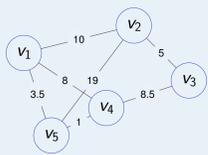


Figure 1 – Un graphe simple pondéré non-orienté (5 sommets / 7 arêtes)

### Matrice de densité et entropie de von Neumann

Soit  $\mathbf{D}$  la **matrice** (diagonale) **des degrés** de  $G$  (le **degré**  $\deg(v_i)$  du sommet  $v_i$  est la somme des pondérations des arêtes lui étant incidentes).

La **matrice laplacienne** de  $G$  est définie par

$$\mathbf{L} := \mathbf{D} - \mathbf{W}, \quad [\mathbf{L}]_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i), & \text{si } i = j \\ -[\mathbf{W}]_{ij}, & \text{si } (v_i, v_j) \in \mathcal{E} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

L'**entropie de von Neumann** de  $G$  est définie par [1] :

$$S(G) := S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) = -\sum_{\ell=1}^n \mu_{\ell} \ln \mu_{\ell} \quad (1)$$

où les  $\mu_{\ell}$  sont les valeurs propres de la **matrice de densité**  $\rho$  de  $G$  définie par [2]

$$\rho := \frac{\mathbf{L}}{\text{Tr}(\mathbf{L})}$$

### Carte de vulnérabilité : Analyse VPV

**Algorithme 1** : Analyse VPV [5]

**Entrée** : Graphe  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{W})$

**Sortie** : Graphe  $\text{VPV}_S = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{W}_S)$

- 1 Calcul de l'entropie  $S(G)$  du graphe  $G$  ;
- 2 **pour**  $\{i, j\} \in \mathcal{E}$  **faire**
- 3 Calcul du graphe  $\tilde{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E} \setminus \{i, j\}, \tilde{\mathbf{W}})$  ;
- 4 Calcul de l'entropie  $S(\tilde{G})$  du graphe  $\tilde{G}$  ;
- 5 Stockage de l'évolution entropique dans  $\mathbf{W}_S$  :  
$$[\mathbf{W}_S]_{ij} = \frac{S(\tilde{G}) - S(G)}{S(G)}$$

**Problème** : Le **calcul du spectre** d'une matrice de taille  $n \times n$  a une **complexité** en  $O(n^3)$ . Ainsi, l'algorithme ci-dessus est en  $O(mn^3)$  ce qui est pénalisant pour de grands graphes.

**Solution** : Proposer une approximation de l'entropie.

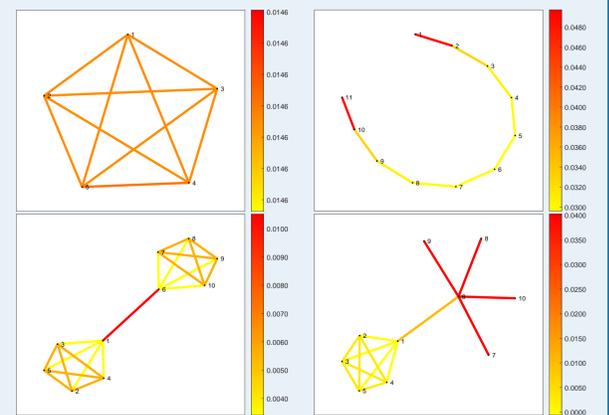


Figure 4 – Analyse VPV sur des graphes élémentaires

La couleur d'une arête correspond à l'**évolution entropique** issue de sa suppression dans le graphe : **plus elle est rouge, plus elle est dite vulnérable**.

## Approximations de l'entropie

Approximer l'entropie  $S(\rho)$  revient à approcher la fonction  $f(x) := x \ln x$ .

### Développement limité

En approchant  $f(x)$  par un **développement limité d'ordre 2** autour d'un point  $0 < \hat{\mu} \leq 1$ , on obtient l'approximation de l'entropie

$$S(G) \approx S_{DL, \hat{\mu}}(G) := \frac{n\hat{\mu}}{2} - \ln \hat{\mu} - \frac{1}{2\hat{\mu}} \text{Tr}(\rho^2)$$

**Propriété de « petit-monde »**  $\implies \hat{\mu} = \frac{1}{n}$ .

### Polynôme

Soit un **polynôme d'ordre 2**  $q(x)$  vérifiant  $q(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})$ ,  $q'(\frac{1}{n}) = f'(\frac{1}{n})$  et  $q(1) = f(1)$ . On obtient l'approximation de l'entropie

$$S(G) \approx S_{poly}(G) := -(a \text{Tr}(\rho^2) + b + nc)$$

$$\text{avec } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{(n-1)^2} \begin{pmatrix} n^2(\ln n - 1) + n \\ n^2(1 - \ln n) - 1 - \ln n \\ -n + 1 + \ln n \end{pmatrix}$$

Soit  $S^C$  l'entropie approchée de Choi et al. [3].  
Soit  $S^H$  l'entropie approchée de Han et al. [4].

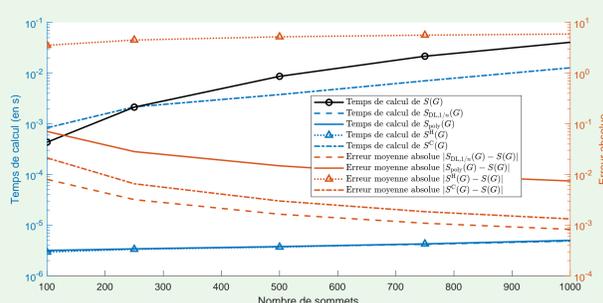


Figure 2 – Temps de calcul (bleu) et erreurs moyennes absolues (orange) calculés sur des graphes possédant la propriété de « petit-monde »

- $S(G)$  : complexité en  $O(n^3)$ .
- $S^C(G)$  : intéressant mais calcul de  $\mu_{\max}$  coûteux.
- $S^H(G)$  : **la plus rapide** mais très peu fidèle.
- $S_{DL, 1/n}(G)$  : **rapide et la plus fidèle**.

## Conclusion & Perspectives

- Approximations de  $S(G)$  **sans calcul de spectre**.
  - Développement limité et polynôme quadratique sous contraintes ;
  - Pas de spectre entier ni de valeur propre maximale ;
  - Dépendent uniquement d'**attributs structurels du graphe**  $G$  ( $n$  et  $m$ ).
- Réduction importante du temps de calcul.
- Les valeurs propres  $(\mu_{\ell})_{1 \leq \ell \leq n}$  de  $\rho$  vérifient  $\sum_{\ell} \mu_{\ell} = 1$  et  $\mu_{\ell} \geq 0$ , elles peuvent être interprétées comme des probabilités. Une **distance adaptée** entre deux distributions est la **divergence de Kullback-Leibler**.
- Pourquoi la suppression de certaines arêtes provoque une **augmentation de l'entropie** ?

## Application à des graphes réels

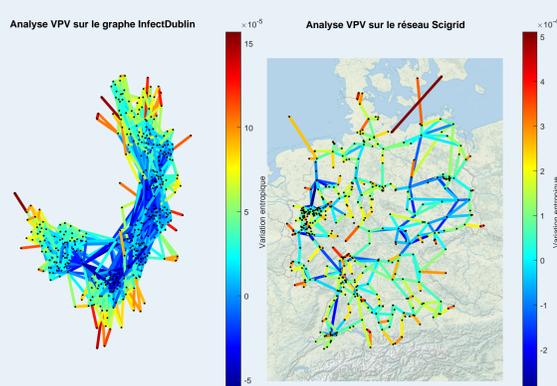


Figure 3 – Analyse VPV sur le graphe InfectDublin (410 sommets / 2765 arêtes) et sur le réseau électrique allemand (511 sommets / 679 arêtes).

	InfectDublin	SciGrid
<b>Temps (en s)</b>		
VPV <sub>S</sub>	20.32	7.88
VPV <sub>S<sup>H</sup></sub>	<b>2.36</b>	<b>0.85</b>
VPV <sub>S<sub>DL, 1/n</sub></sub>	2.37	0.87
VPV <sub>S<sup>C</sup></sub>	7.75	2.79
G <sub>S<sup>poly</sup></sub>	2.39	0.86
<b>Erreurs</b>		
$\ \mathbf{W}_S - \mathbf{W}_{S^H}\ _1$	$2.17 \times 10^{-5}$	$1.26 \times 10^{-4}$
$\ \mathbf{W}_S - \mathbf{W}_{S_{DL, 1/n}}\ _1$	<b><math>0.91 \times 10^{-5}</math></b>	<b><math>0.78 \times 10^{-4}</math></b>
$\ \mathbf{W}_S - \mathbf{W}_{S^C}\ _1$	$1.21 \times 10^{-5}$	$1.12 \times 10^{-4}$
$\ \mathbf{W}_S - \mathbf{W}_{S_{poly}}\ _1$	$2.19 \times 10^{-5}$	$1.27 \times 10^{-4}$

Table 1 – Erreurs et temps de calcul des analyses VPV

- VPV avec  $S^H(G)$  : **la plus rapide**.
- VPV avec  $S_{DL, 1/n}(G)$  : **rapide et la plus fidèle**.

## Références

- [1] F. Passerini and S. Severini. The von Neumann entropy of networks. *arXiv:0812.2597*, 2008.
- [2] S. Braunstein et al. The Laplacian of a graph as a density matrix : a basic combinatorial approach to separability of mixed states. *Ann. Comb.*, 10(3) :291–317, 2006.
- [3] H. Choi et al. Fast computation of von Neumann entropy for large-scale graphs via quadratic approximations. *Linear Algebra Appl.*, 585 :127–146, 2020.
- [4] L. Han et al. Graph characterizations from von Neumann entropy. *Pattern Recognition Letters*, 33(15) :1958–1967, 2012.
- [5] H. A. Bay-Ahmed, D. Daré-Emzivat, and A. Boudraa. Analyse de la vulnérabilité d'un réseau via la mesure de l'entropie de Von Neumann. *GRETSI*, 2019.